De onvolledigheidsstellingen van Gödel en Church

Nicolas Daans

Beschouw de signatuur $\mathcal{L}_{\text{ar}} = \{0, S, +, \cdot, <\}$, waarbij 0 een constantensymbool is, $+$ en $\cdot$ binaire functiesymbolen, S een unair functiesymbool, en $<$ een binair relatiesymbool. We beschouwen de verzameling natuurlijke getal $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-structuur door 0, $+$, $\cdot$ en $<$ op de gebruikelijke manier te interpreteren, en $S^{\mathbb{N}}(n) = n + 1$ te stellen voor $n \in \mathbb{N}$ (de letter S staat voor *successor*, *opvolger* dus).

Is $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-structuur berekenbaar axiomatiseerbaar? Met andere woorden, kunnen we een berekenbare verzameling T van $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-uitspraken vinden zodanig dat elke ware $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-uitspraak over $\mathbb{N}$ via een formeel bewijs uit T volgt? Of (equivalent vanwege Gödel's Onvolledigheidsstelling), zodanig dat elk model van T elementair equivalent is met $\mathbb{N}$? In 1931 toonde Gödel aan dat dit niet mogelijk is. We geven hier enkele ideeën uit het bewijs.

Definitie 1. Zij PA_0 de $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-theorie bestaande uit de volgende 8 uitspraken:

$$\begin{aligned}
&(A1)\ \forall v_0 \neg S(v_0) = 0\\
&(A2)\ \forall v_0 \exists v_1 (\neg(v_0 = 0) \to S(v_1) = v_0)\\
&(A3)\ \forall v_0, v_1 (S(v_0) = S(v_1) \to v_0 = v_1)\\
&(A4)\ \forall v_0 (v_0 + 0 = v_0)\\
&(A5)\ \forall v_0, v_1 (v_0 + S(v_1) = S(v_0 + v_1))\\
&(A6)\ \forall v_0 (v_0 \cdot 0 = 0)\\
&(A7)\ \forall v_0, v_1 (v_0 \cdot S(v_1) = (v_0 \cdot v_1) + v_0)\\
&(A8)\ \forall v_0, v_1 (v_0 < v_1 \leftrightarrow (\exists v_2 (v_2 + v_0 = v_1) \land \neg(v_0 = v_1))
\end{aligned}$$

We noemen PA_0 de verzameling van *zwakke Peano-axioma's.*

Het is duidelijk dat elk van deze axioma's geldig zijn in $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-structuur. Met andere woorden:

Propositie 2. $\mathbb{N} \models \mathrm{PA}_0$.

De zwakke Peano-axioma's zijn zeker niet voldoende om $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-structuur te axiomatiseren; in feite volstaan ze zelfs niet om (bijvoorbeeld) te tonen dat de optelling commutatief is. Men kan wel tonen dat elk model van PA_0 een deelstructuur heeft die isomorf is met $\mathbb{N}$ [1, Lemma 5.3.2].

Toch volstaan de zwakke Peano-axioma's om aan te tonen dat elke berekenbare verzameling van natuurlijke getallen definieerbaar is. We definiëren recursief de $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-term $\underline{n}$ voor een natuurlijk getal n: stel $\underline{0} = 0$ en $\underline{n+1} = S(\underline{n})$; op deze manier hebben we dat $\underline{n}^{\mathbb{N}} = n$ voor elk natuurlijk getal n. De volgende cruciale stelling nemen we aan zonder bewijs; het idee steunt op het stap-voor-stap vertalen van de instructies van een telmachine (of Turingmachine) naar een $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-formule, en hierbij enkel de axioma's uit PA_0 gebruiken.

Stelling 3 (Representeerbaarheid)**.** *Zij $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Zij $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ een berekenbare functie. Er bestaat een $\mathcal{L}_{\text{ar}}$-formule $\varphi(x_1, \ldots, x_{k+1})$ zodanig dat voor $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$\mathrm{PA}_0 \vdash \forall y (\varphi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}, y) \leftrightarrow y = \underline{f(n_1, \ldots, n_k)}).$$

2. *Zij $A \subseteq \mathbb{N}^k$ een berekenbare verzameling. Er bestaat een $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-formule $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ zodanig dat voor $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$\begin{aligned} (n_1, \ldots, n_k) \in A \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{PA}_0 \vdash \varphi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}), \text{ en} \\ (n_1, \ldots, n_k) \notin A \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{PA}_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k}). \end{aligned}$$

Bewijs. Zie [1, Theorem 5.3.5]. □

Stelling 4 (Church). *Stel T een consistente $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-theorie met $\mathrm{PA}_0 \subseteq T$. Dan is T onbeslisbaar.*

Bewijs. Voor een $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-formule ψ noteren we met $\#\psi$ het Gödelgetal van ψ. Stel uit het ongerijmde dat T beslisbaar is. Per definitie betekent dit dat de verzameling

$$\{\#\psi \mid \psi \ \mathcal{L}_{\mathrm{ar}}\text{-uitspraak met } T \vdash \psi\}$$

berekenbaar is. Uit Stelling 3 volgt dat er een $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-formule $\varphi(x)$ bestaat die deze verzameling definieert, of meer bepaald, zodanig dat voor elke $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-uitspraak ψ geldt

$$T \vdash \psi \;\Leftrightarrow\; \mathrm{PA}_0 \vdash \varphi(\underline{\#\psi}) \qquad \text{en} \qquad T \nvdash \psi \;\Leftrightarrow\; \mathrm{PA}_0 \vdash \neg\varphi(\underline{\#\psi}).$$

Beschouw de functie

$$\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (n, m) \mapsto \begin{cases} \#\psi(\underline{m}) & \text{als } n = \#\psi \text{ voor een zekere } \mathcal{L}_{\mathrm{ar}}\text{-formule } \psi(x), \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Deze functie is berekenbaar: er bestaat een algoritme dat op basis van een input n kan nagaan of er een $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-formule $\psi(x)$ bestaat zodanig dat $n = \#\psi(x)$, in dat geval deze formule ook kan vinden, en dan $\#\psi(\underline{m})$ berekent. Door opnieuw Stelling 3 toe te passen, besluiten we dat er een $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-formule $G(x, y, z)$ bestaat zodanig dat voor elke $n, m \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\mathrm{PA}_0 \vdash \forall z(G(\underline{n}, \underline{m}, z) \leftrightarrow z = \sigma(\underline{n}, \underline{m})).$$

Zij nu $\psi(x)$ de formule $\neg\exists z(G(x, x, z) \wedge \varphi(z))$ en zij τ de uitspraak $\psi(\underline{\#\psi})$. Merk op dat $\mathrm{PA}_0 \vdash G(\underline{\#\psi}, \underline{\#\psi}, \underline{\#\tau})$. Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. $T \vdash \tau$. Vanwege de keuze van φ geldt dan $\mathrm{PA}_0 \vdash \varphi(\underline{\#\tau})$, dus $\mathrm{PA}_0 \vdash G(\underline{\#\psi}, \underline{\#\psi}, \underline{\#\tau}) \wedge \varphi(\#\tau)$ en bijgevolg $\mathrm{PA}_0 \vdash \exists z(G(\underline{\#\psi}, \underline{\#\psi}, z) \wedge \varphi(z))$. Maar dan $\mathrm{PA}_0 \vdash \neg\psi(\underline{\#\psi})$ en dus $\mathrm{PA}_0 \vdash \neg\tau$; dit kan niet, want $\mathrm{PA}_0 \subseteq T$ en T is consistent.

2. $T \nvdash \tau$. We bekomen analoog dat $\mathrm{PA}_0 \vdash \neg\varphi(\underline{\#\tau})$ en bijgevolg $\mathrm{PA}_0 \vdash \neg\exists z(G(\underline{\#\psi}, \underline{\#\psi}, z) \wedge \varphi(z))$. Hieruit concluderen we $T \vdash \tau$, maar we hadden ondersteld dat $T \nvdash \tau$; een contradictie.

We besluiten dat onze initiële aanname, namelijk dat T beslisbaar was, verkeerd was. □

Stelling 5 (Gödel's Eerste Volledigheidsstelling). *Stel T een consistente en berekenbare $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-theorie met $\mathrm{PA}_0 \subseteq T$. Dan is T niet volledig.*

Bewijs. We weten uit [1, Theorem 5.2.4] dat een volledige en berekenbaar axiomatiseerbare theorie beslisbaar is. Het resultaat volgt dus uit Stelling 4. □

Voorbeeld 6. De *Peano-axioma's* werden aan het einde van de 19de eeuw voorgesteld als een mogelijke axiomatisatie van de $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-structuur $\mathbb{N}$. In ons moderne framework kunnen ze alsvolgt worden gepresenteerd: de Peano-axioma's bestaan uit PA_0, en het volgende *axiomaschema*: voor elke $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-formule $\varphi(v_0, v_1 \ldots, v_n)$ beschouwen we de $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-uitspraak (noteer $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$)

$$\forall \overline{v}([\varphi(0, \overline{v}) \wedge \forall v_0(\varphi(v_0, \overline{v}) \to \varphi(S(v_0), \overline{v}))] \to \forall v_0 \varphi(v_0, \overline{v})).$$

Dit axiomaschema drukt het inductieprincipe uit: als een eerste-orde-uitspraak over natuurlijk getallen geldt voor 0, en de geldigheid van de uitspraak voor $n+1$ kan worden afgeleid uit de geldigheid van de uitspraak voor n, dan geldt ze voor alle natuurlijk getallen. De Peano-axioma's is de $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-theorie die bestaat uit PA_0 en alle mogelijke instanties van het axiomaschema hierboven.

Het is duidelijke dat de Peano-axioma's een berekenbare theorie vormen; je kan een computerprogramma schrijven dat nagaat of een gegeven $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-formule een Peano-axioma is. De Peano-axioma's vormen ook een consistente theorie; de $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-structuur $\mathbb{N}$ is immers een model. Vanwege Stelling 5 besluiten we dat de Peano-axioma's echter geen volledige theorie kunnen vormen, dus er bestaan $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$-uitspraken die niet bewijsbaar of ontkrachtbaar zijn op basis van de Peano-axioma's.

Referenties

[1] M. Hils en F. Loeser *A First Journey through Logic.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2019.