Katholieke Universiteit Leuven
Departement Wiskunde
Nicolas Daans
18.10.2024

Extra oefeningen: eerste-orde structuren, theorieën en modellen

Oefening 1. Vind voor elk van de volgende klassen van wiskundige concepten een passende axiomatisering, i.e. beschrijf een $\mathcal{L}$-theorie zodanig dat de te beschrijven objecten precies de modellen van deze theorie zijn.

(a) Velden van karakteristiek 0, met $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.
(b) Totaal geordende verzamelingen zonder maximum, met $\mathcal{L} = \{<\}$.
(c) Grafen zonder lus, met $\mathcal{L} = \{E\}$. (De elementen van een $\mathcal{L}$-structuur interpreteer je hierbij als knopen in de graf, E is een binair relatiesymbool dat je interpreteert als "er is een zijde tussen deze twee knopen".)

Oefening 2. Zij $\mathcal{L}$ een signatuur, $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ twee $\mathcal{L}$-structuren en $H : A \to B$ een afbeelding. Bewijs volgende uitspraken:

(a) Als H een homomorfisme is, $t(x_1, \ldots, x_n)$ een $\mathcal{L}$-term, en $a_1, \ldots, a_n \in A$, dan geldt, $H(t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{B}}[H(a_1), \ldots, H(a_n)]$.
(b) Als H een inbedding is, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ een kwantorvrije formule, en $a_1, \ldots, a_n \in A$, dan $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ als en slechts als $\mathfrak{B} \models \varphi[H(a_1), \ldots, H(a_n)]$.
(c) Als H een isomorfisme is, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ een $\mathcal{L}$-formule, en $a_1, \ldots, a_n \in A$, dan $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ als en slechts als $\mathfrak{B} \models \varphi[H(a_1), \ldots, H(a_n)]$.

Besluit dat als $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ isomorf zijn, dat ze dan ook elementair equivalent zijn.

Oefening 3. Beschouw $\mathcal{L} = \{+, 0, <\}$ en beschouw de gehele getallen $\mathbb{Z}$ als een $\mathcal{L}$-structuur: $+^{\mathbb{Z}}$ is de gebruikelijke optelling met neutraal element $0^{\mathbb{Z}}$, en $<^{\mathbb{Z}}$ is de gebruikelijk orde. Toon aan dat de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{Z}$ definieerbaar zijn, i.e. er bestaat een $\mathcal{L}$-formule φ zodanig dat de verzameling gelijk is aan $\varphi[\mathbb{Z}]$.

(1) De verzameling $\{3\}$,
(2) de verzameling $2\mathbb{Z} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Zijn deze verzamelingen ook definieerbaar wanneer we $\mathbb{Z}$ als $\mathcal{L}'$-structuur beschouwen met $\mathcal{L}' = \{+, 0\}$?

Oefening 4. Beschouw $\mathcal{L} = \{f, +, -, \cdot, 0, 1\}$ met f een unair functiesymbool (dus $f \in \mathcal{F}_1$). Beschouw de reële getallen $\mathbb{R}$ als een $\mathcal{L}$-structuur door $+$, $-$, $\cdot$, 0 en 1 op de gebruikelijke manier te interpreteren, en f als een willekeurige functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vind een $\mathcal{L}$-uitspraak φ zodanig dat $\mathbb{R} \models \varphi$ als en slechts als $f^{\mathbb{R}}$ continu is.

Oefening 5. Stel dat $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-structuren zijn en dat A eindig is. Toon dat $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ isomorf zijn als en slechts als ze elementair equivalent zijn.