Katholieke Universiteit Leuven
Departement Wiskunde
Nicolas Daans
25.10.2024

Extra oefeningen: eerste stappen in de modeltheorie

Oefening 1. Voor een signatuur $\mathcal{L} = ((\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}, (\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}^+}, \mathcal{C})$ noteren we met $\mathrm{Fml}^{\mathcal{L}}$ de verzameling van $\mathcal{L}$-formules. Toon aan dat

$$\mathrm{card}(\mathrm{Fml}^{\mathcal{L}}) = \max\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^+}\mathrm{card}(\mathcal{F}_n), \sup_{n\in\mathbb{N}^+}\mathrm{card}(\mathcal{R}_n), \mathrm{card}(\mathcal{C})\right\}.$$

Oefening 2. Toon met behulp van de compactheidsstelling aan dat voor elk van de volgende klassen wiskundige objecten er *geen* $\mathcal{L}$-theorie T bestaat zodanig dat de modellen van T precies overeenkomen met deze wiskundige objecten.

(1) welgeordende verzamelingen, met $\mathcal{L} = \{<\}$,
(2) lichamen van karakteristiek verschillend van 0, met $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$,
(3) samenhangende grafen, met $\mathcal{L} = \{E\}$ (zie vorig oefeningenblad).

Oefening 3. Toon met behulp van de neerwaartse Löwenheim-Skolem stelling het volgende aan: elke oneindig simpele groep heeft een aftelbare simpele deelgroep. (**Hint:** Toon eerst aan: een groep $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ is simpel als en slechts als

$$\forall a, b \in G, \exists n \in \mathbb{N}, \exists g_1, \ldots, g_n \in G, \exists e_1, \ldots, e_n \in \{1, -1\} : b = \prod_{i=1}^{n} g_i a^{e_i} g_i^{-1}.)$$