Katholieke Universiteit Leuven
Departement Wiskunde
Nicolas Daans
31.10.2024

Extra oefeningen: Löwenheim-Skolem Stellingen

Elk van de volgende oefeningen hebben als doel voorbeelden te verkennen van structuren die elementair equivalent zijn maar niet isomorf. Je gebruikt hiervoor de Löwenheim-Skolem Stellingen. Enkele deelstappen vereisen een beetje kennis uit een bepaald deelgebied van de wiskunde, deze worden aangeduid en kan je dus eventueel overslaan. Later kan je deze zelfde oefeningen ook oplossen met behulp van kwantoreneliminatie, maar gebruik dat nu nog niet!

Oefening 1. Beschouw $\mathcal{L} = \{<\}$, we interpreteren geordende verzamelingen als $\mathcal{L}$-structuren op de natuurlijke manier. We noemen een totaal geordende verzameling $(X, <)$ *dicht zonder eindpunten* indien X geen maximum of minimum heeft, en voor alle $x, y \in X$ met $x < y$ er een $z \in X$ bestaat met $x < z < y$. Toon volgende zaken aan:

(a) Er bestaat een $\mathcal{L}$-theorie DLO waarvan de modellen precies de totaal geordende verzamelingen zijn die dicht zijn zonder eindpunten.
(b) (*beetje prutswerk*) Elke twee aftelbare modellen van DLO zijn isomorf.
(c) (*Löwenheim-Skolem*) Elke twee modellen van DLO zijn elementair equivalent.
(d) $(\mathbb{R}, <)$ en $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, <)$ zijn niet isomorf, maar wel elementair equivalent als $\mathcal{L}$-structuren.

Oefening 2. Beschouw $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$; een abelse groep zien we als een $\mathcal{L}$-structuur. Een abelse groep $(G, +, 0)$ heet *torsie-vrij* als voor alle $x \in G \setminus \{0\}$ en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt: $nx \neq 0$ ($2x$ betekent $x+x$, $3x$ betekent $x+x+x$, enzovoort). Een torsie-vrije abelse groep $(G, +, 0)$ heet *divisibel* als voor alle $x \in G$ en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ er een $y \in G$ bestaat met $x = ny$.

Toon het volgende aan:

(a) Er bestaat een $\mathcal{L}$-theorie DAG waarvan de modellen precies de torsie-vrije divisibele abelse groepen zijn.
(b) (*groepentheorie*) Als $(G, +, 0)$ een divisibele torsie-vrije abelse groep is, dan bestaat er een unieke afbeelding $\mathbb{Q} \times G \to G$ die van G (met de operatie $+$) een $\mathbb{Q}$-vectorruimte maakt. Als $(H, +, 0)$ nog zo een divisibele torsie-vrij abelse groep is, dan zijn alle groepsmorfismen tussen G en H ook morfismen van $\mathbb{Q}$-vectorruimten.
(c) (*lineaire algebra*) Elke twee overaftelbare modellen van DAG met dezelfde kardinaliteit zijn isomorf.
(d) (*Löwenheim-Skolem*) Elke twee modellen van DAG zijn elementair equivalent.
(e) $(\mathbb{Q}, +, 0)$ en $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, +, (0, 0))$ zijn elementair equivalent als $\mathcal{L}$-structuren, maar niet isomorf.

Oefening 3. Beschouw $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$, we interpreteren een ring als $\mathcal{L}$-structuur op de natuurlijk manier. Toon het volgende aan:

(a) Er bestaat een $\mathcal{L}$-theorie ACF waarvan de modellen precies de algebraïsch gesloten velden zijn.

(b) (*veldentheorie*) Als K, L_1 en L_2 velden zijn zodanig dat K bevat is in L_1 en L_2, en zodanig dat L_1/K en L_2/K dezelfde transcendentiegraad hebben, dan zijn L_1 en L_2 isomorf.

(c) Elke twee overaftelbare modellen van ACF met dezelfde kardinaliteit en karakteristiek zijn isomorf.

(d) (met Löwenheim-Skolem) Elke twee algebraïsch gesloten velden van dezelfde kardinaliteit en karakteristiek zijn elementair equivalent.