Katholieke Universiteit Leuven
Departement Wiskunde
Nicolas Daans
13.12.2024

Extra oefeningen: Axiomatische verzamelingenleer

We werken in de signatuur $\mathcal{L}_\in$ met één binair relatiesymbool $\in$ en geen andere niet-logische symbolen. We noemen een $\mathcal{L}_\in$-structuur een universum. Herinner je de verschillende axioma(schema)'s van Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer (in de volgorde als in het handboek):

(1) Extensionaliteit
(2) Comprehensie
(3) Paarvorming
(4) Unie
(5) Machtsverzameling
(6) Vervanging
(7) Oneindigheid
(8) Fundering
(9) Keuzeaxioma

We noteren ZF^{-1} voor axioma(schema)'s 1 tot en met 7. Herinner je (Example 6.2.9 in het handboek) ook de definitie van de von Neumann hiërarchie in een universum $\mathcal{U}$ dat een model is van ZF^{-}:

- $V_0 = \emptyset$,
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$,
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ voor een limit ordinal λ.

Oefening 1. Stel Z^0 the theorie bestaande uit axioma(schema)'s 1 tot en met 5. Toon het volgende aan:

(a) Stel $\mathcal{U}$ een universum dat een model is van ZF^{-}. Toon dat $V_\omega \subseteq U$ een deelstructuur induceert van $\mathcal{U}$ die een model is van Z^0 en waarin elke set eindig is.

(b) Stel $\mathcal{V}$ een universum dat model is van Z^0 en waarin elke set eindig is. Toon dat het axiomaschema Vervanging (6) geldig is in $\mathcal{V}$.

(c) Besluit dat (indien ZF^{-} een model heeft) er een universum bestaat dat een model is van axioma's 1 tot en met 6, maar niet van 7.